DESCOMPOSICION LU (DOOLITTLE)

$$Ax = LUx = B \ con \ A = LU \ \ (A \ no \ es \ singular)$$

Se resuelven dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$Ly = B \ \ (se \ resuelve \ por \ sustitucion \ directa)$$
$$Ux = y \ \ (se \ resuelve \ por \ sustitucion \ inversa)$$

Matriz triangular superior “U” (upper):

$$U = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior “L” (lower):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \# & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & 1 & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & \# & 1 & 0 \\ \# & \# & \# & \# & \# & 1 \end{bmatrix}$$

Como obtenemos las matrices U y L?

$$l_{ii} = 1 \ \ ; i \in E \geq 1$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \, u_{kj}$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \, u_{kj} \right) \ \ ; i \neq j$$

FACTORIZACION CHOLESKY

$$Ax = L^{*} L^{*T} x = SS^{T} x = B \ con \ A = SS^{T}$$
$$Siendo \ A \ una \ matriz \ no \ singular, simetrica \ y$$
$$definida \ positiva$$

Se resuelven dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$Sy = B \ \ (se \ resuelve \ por \ sustitucion \ directa)$$
$$S^{T} x = y \ \ (se \ resuelve \ por \ sustitucion \ inversa)$$

Matriz triangular inferior “S”:

$$S = \begin{bmatrix} \# & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & 0 & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & \# & 0 & 0 \\ \# & \# & \# & \# & \# & 0 \\ \# & \# & \# & \# & \# & \# \end{bmatrix} \qquad S^{T} = \begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$$

Como obtenemos la matriz S?

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^{2}}$$

$$s_{ij} = \frac{1}{s_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{jk} \, s_{ik} \right) \ \ ; i \neq j$$

Ventajas y desventajas de cada método? Cantidad de matrices a guardar?

Características de las matrices recomendadas para el uso de métodos directos?

Como nos condiciona la condición de una matriz $\left\| A^{-1} A \right\| = k(A)$?

REFINAMIENTO ITERATIVO DE LA SOLUCION

Siendo $x, la\ solucion\ real$ y $\tilde{x}, la\ solucion\ a\ refinar,$

Llamamos vector residuo a: $R = A(x - \tilde{x}) = Ax - A\tilde{x} = B - A\tilde{x}$

Llamamos vector desvío a: $\delta = x - \tilde{x}$; $entonces\ \tilde{x} = x - \delta$

El proceso iterativo (<u>que no quiere decir que sea un método iterativo para resolver SEL</u>), consiste en refinar el desvío de manera tal que el residuo tienda a cero (<u>o sea una tolerancia aceptable</u>). Es decir,

Solución obtenida por un método directo: $\tilde{x} = x^{(1)}$

Residuo inicial: $R^{(1)} = B - Ax^{(1)}$

Obtengo el desvío de la solución inicial resolviendo el sig. SEL: $R^{(1)} = A\delta^{(1)}$

Y así comienza el refinamiento iterativo:

I) $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \delta^{(1)}$

II) $R^{(i+1)} = B - Ax^{(i+1)}$

III) $R^{(i+1)} = A\delta^{(i+1)} \rightarrow \delta^{(i+1)}$

IV) $Redefinimos\ variables$:

$\delta^{(i)} = \delta^{(i+1)}$;

$x^{(i)} = x^{(i+1)}$ $\quad ya\ que\ pasan\ a\ ser\ las\ variables\ que\ quiero\ refinar.$

$Repetimos\ paso\ I)\ hasta\ que$:

$$\frac{|x^{(i+1)} - x^{(i)}|}{x^{(i+1)}|} \leq tol_1 \quad o \quad \frac{|R^{(i+1)}|}{|\delta^{(i)}|} \leq tol_2$$

Fin proceso iterativo.